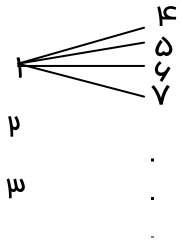
ترکیبیات

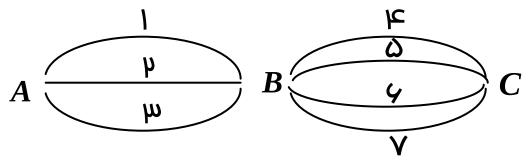
اصل ضرب: هرگاه عمل کاملی از چند جزء ناقص تشکیل شده باشد و هر جز به تعداد حالت های مختلفی قابل انجام باشد ، تعداد کل حالت های انجام این کار برابر با حاصل ضرب تعداد حالت های کارهای ناقص است . (اصل ضرب معمولاً معادل حرف « و » است)

مثال: بین دو شهر A, B سه جاده و بین دو شهر B, C چهار جاده وجود دارد ، به چند طریق می توان از شهر A (از طریق B) به شهر B رفت ؟ C

حل:چون از شهر A به سه طریق می توان به شهر B رفت و از آنجا به چهار طریق می توان به شهر C رفت لذا طبق اصل ضرب داریم :

۱۲ = ۴×۳ بنابر این به ۱۲ طریق می توان از A و با گذر از B به C رفت .





مثال:مطلوب است ، تعداد اعداد سه رقمی با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴ در صورتی که :

الف) تکرار مجاز باشد .　　　　ب) تکرار مجاز نباشد .

حل: الف)رقم صدگان می تواند هر کدام از ارقام ۱,۲,۳,۴ باشد لذا ۴ حالت دارد.رقم دهگان می تواند هر کدام از ارقام ۰,۱,۲,۳,۴ باشد لذا ۵ حالت دارد . رقم یکان نیز می تواند هر کدام از ارقام ۰,۱,۲,۳,۴ باشد لذا یکان نیز ۵ حالت دارد . و طبق اصل ضرب تعداد اعداد سه رقمی با ارقام داده شده برابر خواهد بود با　　$\boxed{۴}\times\boxed{۵}\times\boxed{۵}=۱۰۰$

ب)رقم صد گان می تواند هرکدام از ارقام ۱,۲,۳,۴ باشد لذا ۴ حالت دارد .چون تکرار مجاز نیست رقم دهگان نمی تواند رقمی باشد که در جایگاه صدگان گذاشته شد لذا فقط می تواند سه تا از ارقام ۱,۲,۳,۴ و یا ۰ را بپذیرد بنابر این ۴ حالت خواهد داشت .و رقم یکان هم چون نمی تواند تکراری باشد پس فقط سه تا از ارقام باقی مانده را بگیرد و طبق اصل ضرب تعداد ارقام سه رقمی بدون تکرار با ارقام داده شده برابر خواهد بود با　　$\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۳}=۳۶$

مثال : الف) تعداد تمام اعداد چهار رقمی را بیابید .ب) تعداد اعداد چهار رقمی بدون تکرار ارقام را بیابید .

حل: یعنی باید تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹ را پیداکنیم.

الف)　　$\boxed{۹}\times\boxed{۱۰}\times\boxed{۱۰}\times\boxed{۱۰}=۹۰۰۰$

ب)　　$\boxed{۹}\times\boxed{۹}\times\boxed{۸}\times\boxed{۷}=۴۵۳۶$

مثال : به چند طریق می توان به ۱۰ سوال تستی چهار گزینه ای پاسخ داد در صورتی که :

الف) به هر سوال حتماً باید پاسخ داده شود .   ب) می توان به سوالها پاسخ نداد .

حل: الف) ده سوال وجود دارد که هر سوال چهار حالت برای پاسخ دادن دارد (گزینه یک،دو،سه و چهار) لذا طبق اصل ضرب داریم $4\times 10=40$

ب)این بار هر سوال پنج حالت برای پاسخ دادن دارد (گزینه یک،دو،سه ، چهار و حالتی که به سوال پاسخ داده نشود) لذا طبق اصل ضرب داریم $10\times 5=50$

مثال : چند ماتریس 3×4 با درایه های ۰,۱ می توان ساخت ؟

حل: هر درایه ماتریس دو حالت دارد (یا صفر است یا یک) لذا $2\times 2\times \dots\times 2=2^{12}$ ماتریس می توان ساخت .

مثال : با حروف کلمه $STOP$ چند کلمه سه حرفی می توان نوشت در صورتی که :

الف) با حرف T شروع شود .   ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود .

حل: الف) حرف اول T است یعنی یک حالت بیشت نمی تواند بپذیرد . $\boxed{1}\times\boxed{4}\times\boxed{4}\times\boxed{4}=64$

ب) مانند الف حرف اول و آخر هر کدام یک حالت بیشتر نمی تواند باشد $\boxed{1}\times\boxed{4}\times\boxed{4}\times\boxed{1}=16$

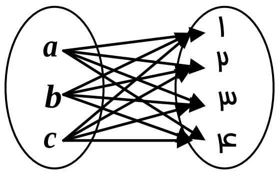
نکته : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است .

اثبات : فرض کنید $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}$ یک مجموعه n عضوی باشد و B زیر مجموعه ای دلخواه از آن باشد a_1 یا به B تعلق دارد یا ندارد پس دو حالت وجود دارد a_2 نیز یا به B تعلق دارد یا ندارد پس برای a_2 نیز دو حالت وجود دارد و به همین ترتیب .بنا بر این طبق اصل ضرب تعداد کل حالات $\underbrace{2\times 2\times \dots\times 2}_{n\ \text{بار}}=2^n$ خواهد بود که تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی را بدست می دهد.

مثال : تعداد زیر مجموعه های $A=\{1,2,3,4\}$ چقدر است ؟

حل : $2^4=16$

مثال : از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{1,2,3,4\}$ چند تابع می توان ساخت ؟



حل : برای هر عضو دامنه یعنی A چهار حالت وجود دارد که به عضوی از برد یعنی B برده شود.

بنابر این $۴\times۴\times۴=۴^{۳}$ تابع از A به B وجود دارد .

نکته : به طور کلی m^{n} تابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی وجود دارد .

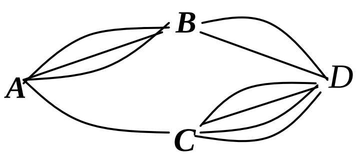
مثال : در مثال قبل چند تابع یک به یک از A به B وجود دارد ؟

حل : این بار چون باید تابع یک به یک باشد دو عضو از دامنه نمی تواند متناظر با یک عضو از برد باشد بنابر این برای a ، ۴ حالت وجود دارد و برای b ناگزیر فقط ۳ وجود دارد و برای c نیز فقط ۲ حالت وجود خواهد داشت .لذا $۴\times۳\times۲=۲۴$ تابع یک به یک از A به B وجود دارد .

نکته : به طور کلی $p\left(n,m\right)=\dfrac{n!}{\left(n-m\right)!}$ تابع یک به یک از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی وجود دارد .

اصل جمع : اگر عمل کاملی به چند صورت مختلف قابل انجام باشد که هر صورت آن چند حالت داشته باشد ، تعداد حالت های انجام این کار برابر با جمع تعداد حالت های صورت های مختلف است . (اصل جمع معادل کلمه « یا » است)

مثال: در شکل زیر که جاده ها همه یک طرفه هستند به چند طریق می توان از شهر A به شهر D رفت ؟



حل: می توان از A به B و از B به D رفت یا از A به C و سپس از C به D رفت

پس : تعداد حالت های ممکن $۳\times۲+۱\times۴=۱۰$

مثال : با ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند عدد کوچکتر از ۱۰۰۰ بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

حل: عدد یک رقمی یا دورقمی یا سه رقمی باید باشد

عدد یک رقمی : ۷ تا

عدد دو رقمی : $\boxed{۷}\times\boxed{۶}=۴۲$

عدد سه رقمی : $\boxed{۷}\times\boxed{۶}\times\boxed{۵}=۲۱۰$

$۷+۴۲+۲۱۰=۲۵۹$

مثال : با ارقام ۱,۲,۴,۵,۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی فرد بزرگ تر از ۴۰۰ می توان ساخت ؟

حل: چون عدد باید فرد باشد پس رقم یکان فقط می تواند ارقام ۱,۵ را بپذیرد و همچنین چون باید عدد از ۴۰۰ بزرگ تر باشد پس رقم صدگان باید بزرگ تر یا مساوی ۴ باشد یعنی رقم صدگان فقط می تواند ارقام ۴,۵,۶ را بپذیرد . از طرفی باید بدون تکرار ارقام باشد لذا

دو حالت پدید می آید.

۱) اگر یکان ۵ باشد صدگان فقط می تواند ۴ یا ۶ باشد و دهگان یکی از اعداد باقی مانده خواهد بود $۶ = \boxed{۱} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲}$

۲) اگر یکان ۱ باشد صدگان می تواند یکی از ارقام ۴,۵,۶ باشد و دهگان یکی از اعداد باقی مانده. $۹ = \boxed{۱} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳}$

بنابر اصل جمع $۱۵ = ۹ + ۶$ عدد با شرایط خواسته شده وجود دارد .

نماد فاکتوریل : برای سهولت در نوشتن ، در محاسبات حاصل ضرب اعداد متوالی از ۱ تا n را با نماد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) نشان می دهند . همچنین قرار داد می کنیم $۱ = !۱, ۱ = !۰$

تذکر : $n! = n(n-۱)!$

مثال : حاصل عبارتهای زیررا بدست آورید :

الف) $\frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$ ب) $\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$ ج) $۱! + ۲! + ۳! = ۱ + ۲ \times ۱ + ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹$

مثال : از معادله $\frac{n!}{(n-۳)!} = ۲۴$ مقدار n را بیابید.

$$\frac{n!}{(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\cancel{(n-۳)!}}{\cancel{(n-۳)!}} = n(n-۱)(n-۲) = ۲۴ \Rightarrow \boxed{n = ۴}$$

جایگشت : اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم به هر نحوه ی قرار گرفتن آنها در کنار هم ، جایگشت گفته می شود .تعداد جایگشت های n شیء متمایز $n!$ است

$$\underbrace{\boxed{n}}_{\text{مکان اول}} \times \underbrace{\boxed{n-۱}}_{\text{مکان دوم}} \times \underbrace{\boxed{n-۲}}_{\text{مکان سوم}} \times \dots \times \underbrace{\boxed{۱}}_{\text{مکان n ام}} = n!$$

مثال : با ارقام ۱,۲,۳,۷,۹ چند عدد ۵ رقمی با ارقام غیر تکراری می توان ساخت ؟

حل : $\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = ۵! = ۱۲۰$

مثال : ۱۰ نامه مختلف را به چند طریق می توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

حل : برای پاکت اول ۱۰ حالت وجود دارد که در آن نامه ای قرار بگیرد ، برای پاکت دوم ۹ حالت و....بنابر این : $۱۰!$ حالت وجود خواهد داشت. $\boxed{۱۰}\times\boxed{۹}\times\ldots\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=۱۰!$

مثال : ۵ سرباز و ۳ افسر را به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد به طوری که

الف) سرباز ها کنار هم باشند؟

ب) سرباز ها کنار هم و افسرها کنار هم باشند؟

الف) چون قرار است سرباز ها کنار هم باشند همه آنها را یک واحد در نظر می گیریم . این ۴ واحد به $۴!$ طریق می توانند در کنار هم قرار بگیرند و سرباز ها نیز درون جعبه به $۵!$ حالت می توانند جابجا شوند پس : $۴!\times۵!=۲۸۸۰$ $\boxed{S_۱S_۲S_۳S_۴S_۵}\ A_۱A_۲A_۳$

ب)این بار سرباز ها یک واحد و افسرها یک واحد در نظر گرفته می شوند و این دو واحد به $۲!$ حالت جابجا می شوند و هر واحد نیز به ترتیب به $۵!$ و $۳!$ حالت قابل جابجایی هستند . پس : $۲!۵!\times۳!=۱۴۴۰$ $\boxed{S_۱S_۲S_۳S_۴S_۵}\ \boxed{A_۱A_۲A_۳}$

مثال : به چند طریق می توان ۷ دانش آموز را که دو نفر آنها برادرند در یک صف قرار داد، طوری که دو برادر کنار هم نباشند .

حل : تعداد حالت هایی که می توانند کنار هم باشند را بدست آورده و از تعداد کل حالت های ممکن برای قرار گرفتن ۷ نفر کنار هم کم می کنیم : $۷!-۶!\times۲!=۳۶۰۰$

مثال : به چند طریق می توان ۳ دانش آموز اول و ۴ دانش آموز دوم را یکی در میان در کنار هم قرار داد ؟

حل :عمل اول: ابتدا ۴ دانش آموز دوم را د ر کنار هم قرار می دهیم . این کار به $۴!$ طریق امکان پذیر است .

عمل دوم : سپس بین آنها سه جای خالی وجود خواهد داشت که ۳ دانش آموز اول را در آن مکان ها قرار می دهیم . این کار به $۳!$ امکان پذیر است. $۴!\times۳!=۱۴۴$ $\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}$

مثال :مثال قبل را با شرط ۴ نفر بودن دانش آموزان اول حل کنید .

حل : طوری قرار بگیرند که نفر اول کلاس دومی باشد یا طوری قرار بگیرند که نفر اول کلاس اولی باشد :

$\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\Rightarrow ۴!\times۴!$ یا $\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\overbrace{\ldots}^{\boxed{۱}}\boxed{۲}\Rightarrow ۴!\times۴!$ $\xrightarrow{+}۲\times۴!\times۴!=۱۱۵۲$

نکته : جایگشت یکی در میان :

الف) اگر دو دسته هم تعداد نباشند : $m!\times n!$

ب) اگر دو دسته هم تعداد باشند : $۲\times(m!)^{۲}$

جایگشت n شیء غیر متمایز :

هرگاه بخواهیم n شیء را که $n_۱$ تای آن شبیه هم و $n_۲$ تای آن شبیه هم و... کنار هم قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\ldots\times n_k!}$$

مثال : با حروف کلمه "دامداران" چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟

حل: چون کلمه دامداران ۸ حرف است که سه حرف" الف" و دو حرف "د" در آن تکرار شده لذا داریم :

$$\frac{۸!}{۳!\times ۲!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times ۲}=۳۳۶۰$$

مثال : با اعداد ۱,۱,۲,۲,۲,۳,۳ چند عدد هفت رقمی می توان ساخت ؟

حل : $\frac{۷!}{۲!\times۳!\times۲!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴\times۳!}}{\cancel{۳!\times۴}}=۲۱۰$

جایگشت k شیء از n شیء متمایز : $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم k شیء از بین آنها انتخاب کنیم و آنها را در کنار هم قرار دهیم به طوریکه ترتیب قرار گرفتن آنها مهم باشد تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\underset{\text{مکان اول}}{\boxed{n}}\times\underset{\text{مکان دوم}}{\boxed{n-۱}}\times\underset{\text{مکان سوم}}{\boxed{n-۲}}\times\ldots\times\underset{\text{مکان k-1 ام}}{\boxed{n-(k-۱)}}=n\times(n-۱)\times\ldots\times(n-(k-۱))=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال : ۶ نفر به سینما می روند و در یک ردیف ۱۰ صندلی خالی وجود دارد. به چند طریق این افراد می توانند روی صندلی ها بنشینند ؟

حل : کافیست ۶ صندلی از ۱۰ صندلی را انتخاب کرده سپس روی آنها بنشینند یعنی جاگشت ۶ از ۱۰ که برابر

$$\frac{۱۰!}{(۱۰-۶)!}=\frac{۱۰!}{۴!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۱۵۱۲۰۰$$ است.

مثال : چند رشته (کلمه) سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می توان نوشت؟

حل: کافیست سه حرف از بیست و شش حرف انگلیسی را انتخاب کرده و آنها را جایگشت دهیم. یعنی جایگشت ۳ از ۲۶ :

$$\frac{۲۶!}{(۲۶-۳)!}=\frac{۲۶\times۲۵\times۲۴\times\cancel{۲۳!}}{\cancel{۲۳!}}=۲۶\times۲۵\times۲۴=۱۵۶۰۰$$

مثال : درون بشقابی یک سیب ، یک پرتقال و یک انار گذاشته شده است. اگر از بین ۶ نفر ۳ نفر به طرف بشقاب رفته و هر کدام یک میوه بردارند به چند روش ممکن است ۳ میوه توزیع شده باشند ؟

حل: جایگشت ۳ از ۶ : $\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=۶\times۵\times۴=۱۲۰$

مثال : با حروف کلمه $FAMILY$ و بدون تکرار حروف چند کلمه چهار حرفی شامل حرف M می توان ساخت؟

حل: عمل اول : قرار دادن M در یکی از چهار مکان : به ۴ طریق

عمل دوم : پر کردن سه مکان باقی مانده توسط پنج حرف باقی مانده : به ۶۰ طریق $\frac{۵!}{۲!}=۶۰$

و طبق اصل ضرب کل کلمات مطلوب برابر است با : $۴\times۶۰=۱۲۰$

مثال : در یک مسابقه با ۱۴ شرکت کننده به چند طریق امکان دارد سه مدال طلا ، نقره و برنز به شرکت کننده ها برسد ؟

حل: به عبارت دیگر سه نفر از بین ۱۴ نفر انتخاب می شوند و در جایگاه ها در کنار هم قرار می گیرد لذا جایگشت ۳ از ۱۴ است :

$$p\left(۱۴,۳\right)=\frac{۱۴!}{(۱۴-۳)!}=۱۴\times۱۳\times۱۲=۲۱۸۴$$

ترکیب k شیئی از n شیء : $C\left(n,k\right)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

اگر از بین n شیء متمایز بخواهیم k شیء انتخاب کنیم و ترتیب کنار هم قرار گرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد ، به آن یک ترکیب k شیئی از n شیء گوییم .به عبارت دیگر به هر زیر مجموعه k عضوی از یک مجموعه n عضوی یک ترکیب k تایی از این n عضو می گویند.

مثال : تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی از مجموعه $\{1,2,...,10\}$ را بیابید.

حل : همان طور که می دانیم در مجموعه ها ترتیب قرار گرفتن اعضا مهم نیستند :

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{3!\cancel{7!}}=\frac{10\times9\times8}{6}=120$$

مثال: ثابت کنید $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$

حل: ۱) قبلاً دیدیم که تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n

۲)همچنین در ترکیب نیز آموختیم که تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$

۳)لذا تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با تعداد زیر مجموعه های هیچ عضوی+تعداد زیر مجموعه های یک عضوی+ تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی+...+تعداد زیر مجموعه های n یعنی : $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$

۴)بنابر این $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$

مثال : از میان ۶ مرد و ۸ زن وبه چند طریق می توان کمیته ای ۵ نفره تشکیل داد ، که شامل۳ مرد و ۲ زن باشد؟

حل : انتخاب ۳ مرد از بین ۶ مرد به $\binom{6}{3}$ طریق و انتخاب ۲ زن از بین ۸ زن به $\binom{8}{2}$ طریق

طبق اصل ضرب به $\binom{8}{2}\binom{6}{3}$ طریق می توان این کمیته را تشکیل داد.

مثال : در یک آپارتمان که ۱۰ خانوار دارد قرار است یک شورای ۴ نفره تشکیل شود که از هر خانوار فقط زن یا شوهر می تواند عضو آن شورا بشود.به چند طریق ممکن است شورای ۴ نفره تشکیل شود ؟

حل: ابتدا ۴ خانواری را که قرار است یک نفر از آنها عضو شود را انتخاب می کنیم برای این کار $\binom{10}{4}$ حالت وجود دارد

پس از انتخاب ۴ خانوار از هر کدام به دو حالت یک نفر می تواند انتخاب شود لذا طبق اصل ضرب داریم : $\binom{10}{4}\times2^4$

تمرین : از ۶ شهرو از هر شهر ۱۰ دانش آموز برای المپیاد ریاضی دعوت شده اند ، به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر همشهری هستند انتخاب کرد ؟

مثال : به چند طریق می توان ۵ نفر را از میان یک کلاس ۲۰ نفره انتخاب کرد به طوریکه :

الف) شامل اشخاص b, a باشد.   ب) شامل اشخاص e, d, c نباشد .   ج) شامل اشخاص b, a باشد و شامل e, d, c نباشد .

حل:

الف) برای اینکه گروه انتخاب شده شامل افراد b, a باشد ، ابتدا b, a را انتخاب کرده و سپس سه نفر دیگر را از میان ۱۸ نفر باقی مانده انتخاب می کنیم که تعداد حالات ممکن برابر است با : $\binom{18}{3} = \frac{18\times17\times16\times\cancel{15!}}{6\times\cancel{15!}} = 816$

ب) برای اینکه افراد e, d, c جزء گروه ۵ نفره ما نباشد ابتدا این سه نفر را از لیست کلاس حذف کرده سپس ۵ نفر گروه را از بین ۱۷ نفر باقیمانده انتخاب می کنیم که تعداد حالات ممکن برابر است با : $\binom{17}{5} = \frac{17!}{5!(17-5)!} = \frac{17\times16\times15\times14\times13\times\cancel{12!}}{5\times4\times3\times2\times1\times\cancel{12!}} = 6188$

ج) ابتدا b, a را انتخاب نموده سپس e, d, c را از کلاس حذف کر ده و سه نفر دیگر را از ۱۵ نفر باقیمنده انتخاب می کنیم که تعدا حالات ممکن برابر است با : $\binom{15}{3} = \frac{15\times14\times13}{6} = 455$

روابط مهم ترکیباتی :

۱) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ۲) **قاعده پاسکال :** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ۳) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

نتایج :

۱) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ۲) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ۳) $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

نکته : تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی یک مجموعه n عضوی = تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی یک مجموعه n عضوی= 2^{n-1}

مثال : مقدار n را از معادله $\binom{18}{n} = \binom{18}{2n-3}$ بیابید .

حل: با توجه به خاصیت ۱) مشاهده می کنیم که مجموع دو عدد پایینی برابر با عدد بالایی است لذا :

$$n+(2n-3)=18 \Rightarrow 3n=21 \Rightarrow n=7$$

مثال : مقدار $\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$ بیابید .

حل: اول اینکه عبارت اول را می توان $\binom{3}{3}$ نوشت ثانیا طبق خاصیت ۲) دو عبارت اول می شود : $\binom{4}{3}$ و این عبارت با عبارت بعدی می شود : $\binom{5}{3}$ و به همین ترتیب حاصل کل برابر می شود با $\binom{8}{3}$

مثال : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(n+2)$ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی است ؟

حل: می دانیم تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(n+2)$ عضوی برابر $2^{(n+2)}$ است و تعداد زیر مجموعهٔ های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است لذا با تقسیم این دو داریم : $\frac{2^{(n+2)}}{2^n}=\frac{\cancel{2^n}\times 2^2}{\cancel{2^n}}=4$

مثال: می خواهیم از بین ۵ دانش آموز گروه هایی تشکیل دهیم که حد اقل دو عضو داشته باشد این کار به چند طریق امکان پذیر است ؟

حل : بنابر این باید دو نفر از این ۵ نفر را برای تشکیل گروه انتخاب کنیم یا ۳ نفر را انتخاب کنیم یا... یا ۵ نفر را انتخاب کنیم که این انتخاب ها به ترتیب به $\binom{5}{2},\binom{5}{3},\binom{5}{4},\binom{5}{5}$ طریق ممکن است و طبق اصل جمع داریم : $\binom{5}{5}+\binom{5}{4}+\binom{5}{3}+\binom{5}{2}$ که با اضافه و کم کردن مقدار $\overbrace{\binom{5}{1}+\binom{5}{0}}^{1+5=6}$ به مقدار بدست آمده داریم : $\overbrace{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}}^{2^5}-\binom{5}{0}-\binom{5}{1}=2^5-6=26$

مثال: به چند طریق می توان یک کمیته ۵ نفره از بین ۴ نفر زن و ۶نفر مرد تشکیل داد به طوری که کمیته حداقل شامل ۳ مرد باشد ؟

حل: چون کمیته ۵ نفری باید شامل سه مرد باشد ، تعداد حالات تشکیل کمیته عبارت ان از :

۳ مرد و ۲ زن : طبق اصل ضرب به $\binom{4}{2}\times\binom{6}{3}$ حالت ممکن است انتخاب شوند.یا

۴ مرد و ۱ زن : طبق اصل ضرب به $\binom{4}{1}\times\binom{6}{4}$ حالت ممکن است انتخاب شوند.یا

هر ۵ نفر مرد باشند : $\binom{6}{5}$ حالت ممکن است انتخاب شوند.

طبق اصل جمع تعداد حالات ممکن برابر است با : $\binom{6}{5}+\binom{4}{1}\times\binom{6}{4}+\binom{4}{2}\times\binom{6}{3}=6+4\times15+6\times20=186$

مثال : در یک آزمون که ۱۲ سوال دارد ، شخصی می خواهد به ۶ سوال آن پاسخ دهد .این کار به چند طریق می تواند انجام شود در صورتی که :

الف) هیچ شرطی وجود نداشته باشد. ب) حداقل به ۳ سوال پاسخ دهد .

حل :الف) در این حالت کافی است از بین ۱۲ سوال موجود ۶ تای آن را انتخاب کند. در ضمن ترتیب هم اهمیتی ندارد لذا تعداد حالات: $\binom{12}{6}$

ب) ۳ سوال از ۵ سوال اول و ۳ سوال از ۷ سوال بعدی : $\binom{7}{3}\binom{5}{3}$ و یا

۴ سوال از ۵ سوال اول و ۲ سوال از ۷ سوال بعدی : $\binom{7}{2}\binom{5}{4}$ و یا

۵ سوال از ۵ سوال اول و ۱ سوال از ۷ سوال بعدی : $\binom{7}{1}\binom{5}{5}$

بنا براین تعداد کل حالات ممکن : $\binom{7}{1}\binom{5}{5}+\binom{7}{2}\binom{5}{4}+\binom{7}{3}\binom{5}{3}=7+105+350=462$

تمرین : در کیسه ای ۷ مهره قرمز و ۶ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه سه مهره با هم و به تصادف خارج می کنیم : مطلوبست:

الف) تعداد حالاتی که هر سه مهره همرنگ باشند. ب) هر سه مهره از رن گهای مختلف باشند.